



Β' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.1. Θεωρία βλ. Βιβλίο ΟΕΔΒ Άλγεβρα Β' Λυκείου σελ. 28.
 A.2. Θεωρία σελ. 95, 96.

- B.1. 1. Σωστό
 2. Σωστό
 3. Λάθος
 4. Σωστό
 5. Λάθος

ΘΕΜΑ 2^ο

Έχουμε $P(-3) = -8$ και $P(-2) = 0$

- a) • $P(-3) = -8 \Leftrightarrow (-3)^3 + \alpha \cdot (-3)^2 - (-3) + \beta = -8 \Leftrightarrow 9\alpha + \beta = 16$
 • $P(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^3 + \alpha(-2)^2 - (-2) + \beta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = 6$
 Επομένως έχουμε το σύστημα
 $\left. \begin{array}{l} 9\alpha + \beta = 16 \\ 4\alpha + \beta = 6 \end{array} \right\}$ που έχει λύση $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.

- β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = -2$ το πολυώνυμο γίνεται
 $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Έτσι έχουμε

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 2x^2 - x - 2 & x^2 + x - 1 \\
 \hline
 -x^3 - x^2 + x & x + 1 \\
 \hline
 x^2 + 0 \cdot x - 2 & \\
 \hline
 -x^2 - x + 1 & \\
 \hline
 -x - 1 &
 \end{array}$$

Άρα $\Pi(x) = x + 1$ και $\nu(x) = -x - 1$.

Επομένως $P(x) = (x^2 + x - 1)(x + 1) - x - 1$.

$$\begin{aligned}
 \gamma) \quad P(x) = Q(x) - 1 &\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x + 1) - x - 1 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)(x + 1) - x - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)(x + 1) - x - (x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)x - x = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)x = 0 \\
 &\text{άρα οι λύσεις είναι } x = 0, x = -2 \text{ και } x = 1
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. α) Η εξίσωση (1) γίνεται

$$\begin{aligned}
 \eta\mu 2x - \sqrt{2}\sigma vvx = 0 &\Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sigma vvx - \sqrt{2}\sigma vvx = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sigma vvx(2\eta\mu x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \sigma vvx = 0 \quad \& \quad \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

Οι λύσεις είναι

- $\sigma vvx = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

- $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \& \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \& \quad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

β) Για κάθε $x \in [0, \pi]$ έχουμε

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}.$$

Άρα $k = 0$. Τότε $x = \frac{\pi}{2}$

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2k\pi \leq \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}.$$

Άρα ο k δεν ορίζεται

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq 2k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{3}{8}.$$

Άρα $k = 0$. Τότε $x = \frac{\pi}{4}$

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq 2k\pi \leq \pi - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}.$$

Άρα $k = 0$. Τότε $x = \frac{3\pi}{4}$

$$\Delta\eta\lambda\delta\eta \text{ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι } x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2} \text{ και } x_3 = \frac{3\pi}{4}.$$

Ακόμα $x_1 + x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi = 2\frac{\pi}{2} = 2x_2$ που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B.} \quad & \frac{3 - 4\sigma v v^2 \alpha + \sigma v v^4 \alpha}{3 + 4\sigma v v^2 \alpha + \sigma v v^4 \alpha} = \frac{3 - 4\sigma v v^2 \alpha + 2\sigma v v^2 \alpha - 1}{3 + 4\sigma v v^2 \alpha + 2\sigma v v^2 \alpha - 1} = \\
 & = \frac{2\sigma v v^2 \alpha - 4\sigma v v^2 \alpha + 2}{2\sigma v v^2 \alpha + 4\sigma v v^2 \alpha + 2} = \frac{(2\sigma v v^2 \alpha - 1)^2 - 2(2\sigma v v^2 \alpha - 1) + 1}{(2\sigma v v^2 \alpha - 1)^2 + 2(2\sigma v v^2 \alpha - 1) + 1} = \\
 & = \frac{4\sigma v v^4 \alpha - 4\sigma v v^2 \alpha + 1 - 4\sigma v v^2 \alpha + 2 + 1}{4\sigma v v^4 \alpha - 4\sigma v v^2 \alpha + 1 + 4\sigma v v^2 \alpha - 2 + 1} = \frac{(2\sigma v v^2 \alpha - 2)^4}{4\sigma v v^4 \alpha} = \\
 & = \frac{(2\sigma v v^2 \alpha - 2)^4}{4\sigma v v^4 \alpha} = \frac{(-2\eta\mu^2\alpha)^2}{4\sigma v v^4 \alpha} = \frac{4\eta\mu^4\alpha}{4\sigma v v^4 \alpha} = \varepsilon\varphi^4\alpha
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A.

i. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 L &= \varphi(2) \cdot \varphi(3) \cdot \varphi(4) \cdots \varphi(63) + 2004 = \\
 &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot \frac{\ln 4}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 5}{\ln 4} \cdots \frac{\ln 64}{\ln 63} + 2004 = \\
 &= \frac{\ln 64}{\ln 2} + 2004 = \frac{\ln 2^6}{\ln 2} + 2004 = \frac{6 \cdot \ln 2}{\ln 2} + 2004 = 6 + 2004 = 2010.
 \end{aligned}$$

ii. Έχουμε :

$$\varphi(x) > \varphi(x^2) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln x} > \frac{\ln(x^2+1)}{\ln x^2} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln x} > \frac{\ln(x^2+1)}{2\ln x}$$

Επειδή για $x > 1$ είναι $\ln x > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln(x+1)}{1} &> \frac{\ln(x^2+1)}{2} \Leftrightarrow 2\ln(x+1) > \ln(x^2+1) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \ln(x+1)^2 > \ln(x^2+1) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x+1)^2 > x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > x^2 + 1 \Leftrightarrow x > 0
 \end{aligned}$$

Αλλά $x > 1$. Επομένως η λύση είναι $x > 1$.

B. i. Πρέπει

$$\begin{aligned} e^{2x} - (e+1)e^x + e > 0 &\Leftrightarrow e^{2x} - e \cdot e^x - e^x + e > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^x(e^x - e) - (e^x - e) > 0 \Leftrightarrow (e^x - e) \cdot (e^x - 1) > 0. \end{aligned}$$

Θέτω $e^x = y > 0$. Τότε

$$(y-e)(y-1) > 0$$


 $y > e \quad \text{ή} \quad 0 < y < 1.$ Επειδή $x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow y > 1.$
Άρα ισχύει μόνο $e^x > e \Leftrightarrow x > 1$ Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται για $x \in (1, +\infty)$.**ii.** Για κάθε $x > e \Leftrightarrow \ln x > 1$ επομένως έχουμε

$$f(\ln x) = \ln(x-1) \Leftrightarrow \ln(e^{2 \ln x} - (e-1)e^{\ln x} + e) = \ln(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln x^2} - (e-1)e^{\ln x} + e = (x-1) \Leftrightarrow x^2 - (e-1)x + e = x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - e \cdot x - x + e - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x(x-e) - (x-e) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-e)(x-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x-e-1) = 0$$

Οι λύσεις είναι

$$x = 1 \quad (\text{Απορρίπτεται αφού } x > e) \text{ και}$$

$$x = e+1 \quad (\Delta \varepsilon \kappa \tau \eta)$$